Analogie zwischen elastischem und plastischem Potential anisotroper Stoffe

Josef Betten

Institut für Werkstoffkunde der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule, Aachen

(Z. Naturforsch. **32 a**, 432–436 [1977]; eingegangen am 2. Februar 1977)

Analogy between the Elastic and Plastic Potential of Anisotropic Materials

The elastic strain energy of distortion and its complementary energy of incompressible materials can be represented formally by linear combinations of partial plastic potentials of the forms $F_\varrho = (1/\varrho) D_{ijkl\ldots qr}\,\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}\ldots\sigma'_{qr}$. Likewise, it is possible to describe the elastic strain energy of deformation and its complementary energy of compressible materials formally by plastic potentials of the forms $F_\varrho = (1/\varrho) D_{ijkl\ldots qr}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}\ldots\sigma_{qr}$. In a linear theory, for example, we have $F_2 = \frac{1}{2} D_{ijkl}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}$ for incompressible materials and $F_2 = \frac{1}{2} D_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}$ for compressible materials.

It is necessary to notice, that only a formal analogy exsists between the elastic and plastic potential, because the physical interpretation of these potentials is quite different.

Grundlegende Bemerkungen zum elastischen und plastischen Potential

In der Elastomechanik geht man aus von einem elastischen Potential [1, 2]

$$\Pi = \Pi(\sigma_{ij}, {}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij}\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij} \tag{1}$$

und ermittelt über die „Stoffregel“

$$\sigma_{ij} = \partial\Pi/\partial\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij} \quad \text{bzw.} \quad {}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij} = \partial\Pi/\partial\sigma_{ij} \tag{2 a, b}$$

die zugehörigen Stoffgleichungen. Analog dem inneren Produkt zweier Vektoren ist das elastische Potential (1) eine simultane Invariante der beiden Tensoren σ_{ij} (Spannungstensor) und ${}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij}$ (Tensor der elastischen Verzerrungen). Über das vollständige Differential $\mathrm{d}\Pi = (\partial\Pi/\partial\sigma_{ij})\,\mathrm{d}\sigma_{ij} + (\partial\Pi/\partial\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij})\,\mathrm{d}\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij}$ kann man das elastische Potential wegen (2 a, b) in die Formänderungsenergiedichte Π_ε und in die spezifische Ergänzungsarbeit Π_σ gemäß

$$\Pi = \Pi_\sigma + \Pi_\varepsilon = \int {}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\sigma_{ij} + \int \sigma_{ij}\,\mathrm{d}\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij} \tag{3}$$

aufspalten (Abbildung 1).

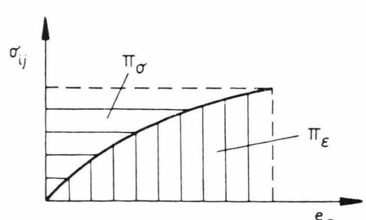

Abb. 1. Aufspaltung des elastischen Potentials Π in Formänderungsenergiedichte Π_ε und spezifische Ergänzungsarbeit Π_σ.

Das elastische Potential Π bzw. die Größen Π_σ und Π_ε können von der funktionalen Form

$$\Pi_\sigma = \Pi_\sigma(F_\varrho) \quad \text{mit} \quad F_\varrho = \frac{1}{\varrho} D_{ijkl\ldots qr}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}\ldots\sigma_{qr} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, N)\,^*, \tag{4 a}$$

$$\Pi_\varepsilon = \Pi_\varepsilon(G_\varrho) \quad \text{mit} \quad G_\varrho = \frac{1}{\varrho} E_{ijkl\ldots qr}\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij}\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{kl}\ldots{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{qr} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, N) \tag{4 b}$$

sein. Damit erhält man wegen (3) aus (2 a, b) die Stoffgleichungen

$${}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij} = \sum_{\varrho=1}^{N} \frac{\partial\Pi_\sigma}{\partial F_\varrho}\frac{\partial F_\varrho}{\partial\sigma_{ij}} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = \sum_{\varrho=1}^{N} \frac{\partial\Pi_\varepsilon}{\partial G_\varrho}\frac{\partial G_\varrho}{\partial\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij}}, \tag{5 a, b}$$

die beispielsweise für die Linearkombinationen ($N = 3$)

$$\Pi_\sigma = F_1 + F_2 + F_3 \quad \text{und} \quad \Pi_\varepsilon = G_1 + G_2 + G_3 \tag{6 a, b}$$

lauten

$${}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij} = D_{ij} + D_{ijkl}\,\sigma_{kl} + D_{ijklmn}\,\sigma_{kl}\,\sigma_{mn}\,, \tag{7 a}$$

$$\sigma_{ij} = E_{ij} + E_{ijkl}\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{kl} + E_{ijklmn}\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{kl}\,{}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{mn}\,. \tag{7 b}$$

Darin können die Stofftensoren D_{ij} und E_{ij} als „Eigenverformungstensor“ und „Eigenspannungstensor“ gedeutet werden.

Analog ** zum elastischen Potential geht man in der Plastomechanik von einem plastischen Potential [3]

$$F = F(\sigma_{ij}) \tag{8}$$

* Beispielsweise ist $F_1 = D_{ij}\,\sigma_{ij}$ eine lineare und $F_2 = \frac{1}{2} D_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}$ eine quadratische Form usw.

** Die hier angesprochene Analogie ist nur formal zu sehen! Es ist zu beachten, daß in der Elastomechanik die Existenz eines Potentials aus thermodynamischen Überlegungen ableitbar ist. Die Theorie des plastischen Potentials ergibt sich aus dem Prinzip der größten spezifischen Dissipationsleistung [3]. Der Vergleich von (2 b) und (9) zeigt schon, daß die Bedeutung des elastischen und plastischen Potentials grundverschieden ist.

aus und ermittelt über die Fließregel

$$d^p\varepsilon_{ij} = (\partial F/\partial\sigma_{ij})\,d\lambda\,; \quad d\lambda \geqq 0 \tag{9}$$

($^p\varepsilon_{ij}$ plastischer Anteil des Verzerrungstensors ε_{ij}; $d\lambda$ Proportionalitätsfaktor) die Stoffgleichungen. Mit (8) wird das Fließkriterium als Äquipotentialfläche $F(\sigma_{ij}) = c = \text{const.}$ dargestellt, die gemäß der Fließregel (9) und dem Stabilitätskriterium [4]

$$d\sigma_{ij}\, d^p\varepsilon_{ij} \geqq 0 \tag{10}$$

konvex sein muß [5, 6].

Analog zur elastischen Ergänzungsarbeit (4 a) oder (6 a) kann das plastische Potential (8) von der funktionalen Form

$$F = F(F_\varrho) \quad \text{mit} \quad F_\varrho = \frac{1}{\varrho} D_{ijkl\ldots qr}\, \sigma_{ij}\, \sigma_{kl} \ldots \sigma_{qr}\,, \tag{11}$$

z. B.

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \tag{12}$$

sein [7]. Der Unterschied liegt in den anisotropen Stofftensoren D_{ij}, D_{ijkl} usw., die in (4 a) und (11) gleich bezeichnet sind, um die formale Identität noch deutlicher zu zeigen. Das elastische und plastische Potential können allerdings für ein und denselben Stoff sehr unterschiedlich sein. So kann beispielsweise ein elastisch isotroper Stoff durch plastische Verformung anisotrop werden (Verformungsanisotropie; Textur).

Der isotrope Sonderfall ist gekennzeichnet durch die isotropen Stofftensoren

$$D_{ij} = a_1\,\delta_{ij}\,, \tag{13 a}$$

$$D_{ijkl} = b_1\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + b_2(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk})\,, \tag{13 b}$$

$$\begin{aligned} D_{ijklmn} = {} & c_1\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}\,\delta_{mn} + c_2(\delta_{ij}\,\delta_{km}\,\delta_{ln} + \delta_{ij}\,\delta_{kn}\,\delta_{lm} \\ & + \delta_{kl}\,\delta_{im}\,\delta_{jn} + \delta_{kl}\,\delta_{in}\,\delta_{jm} + \delta_{mn}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \quad (13\text{ a}) \\ & + \delta_{mn}\,\delta_{il}\,\delta_{jk}) + c_3(\delta_{ik}\,\delta_{jm}\,\delta_{ln} + \delta_{ik}\,\delta_{jn}\,\delta_{lm} \\ & + \delta_{il}\,\delta_{km}\,\delta_{jn} + \delta_{il}\,\delta_{kn}\,\delta_{jm} + \delta_{im}\,\delta_{kj}\,\delta_{ln} \\ & + \delta_{im}\,\delta_{kn}\,\delta_{lj} + \delta_{in}\,\delta_{kj}\,\delta_{lm} + \delta_{in}\,\delta_{km}\,\delta_{lj})\,. \end{aligned}$$

Mit diesen isotropen Ansätzen und den Konstanten

$$a_1 = 1\,, \quad b_1 = -1\,, \quad b_2 = c_1 = \tfrac{1}{2}\,, \quad c_2 = -\tfrac{1}{4}\,, \quad c_3 = \tfrac{1}{8} \tag{14}$$

gehen die F_ϱ in (4 a), (6 a), (11) und (12) in die lineare (J_1), quadratische (J_2) und kubische (J_3) Invariante des Spannungstensors über [7]:

$$F_1 = \delta_{ij}\,\sigma_{ij} \equiv J_1\,, \quad F_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_{ij}\,\sigma_{ji} - \sigma_{ii}\,\sigma_{jj}) \equiv J_2\,, \tag{15 a, b}$$

$$F_3 = \tfrac{1}{6}(2\,\sigma_{ij}\,\sigma_{jk}\,\sigma_{ki} - 3\,\sigma_{ij}\,\sigma_{ji}\,\sigma_{kk} + \sigma_{ii}\,\sigma_{jj}\,\sigma_{kk}) \equiv J_3\,. \tag{15 c}$$

Setzt man dagegen

$$a_1 = 0\,, \quad b_1 = -\tfrac{1}{3}\,, \quad b_2 = \tfrac{1}{2}\,, \quad c_1 = \tfrac{2}{9}\,, \quad c_2 = -\tfrac{1}{6}\,, \quad c_3 = \tfrac{1}{8}\,, \tag{16}$$

so erhält man entsprechend die Invarianten

$$F_1 = J_1' \equiv 0\,, \quad F_2 = \tfrac{1}{2}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{ji} \equiv J_2'\,, \tag{17 a, b}$$

$$F_3 = \tfrac{1}{3}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{jk}\,\sigma'_{ki} \equiv J_3' \tag{17 c}$$

des Spannungsdeviators σ'_{ij}.

Elastische Gestaltänderungsenergiedichte und plastisches Potential inkompressibler Stoffe

Zur Formulierung der elastischen Gestaltänderungsenergiedichte

$$^e A' = \int \sigma'_{ij}\, d^e\varepsilon'_{ij} \tag{18}$$

bildet man aus (7 a) den Deviator

$$^e\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_{rr}\,\delta_{ij} \tag{19}$$

und erhält die Stoffgleichung

$$^e\varepsilon'_{ij} = D'_{ij} + D'_{\{ij\}kl}\,\sigma_{kl} + D'_{\{ij\}klmn}\,\sigma_{kl}\,\sigma_{mn}\,, \tag{20}$$

wenn man definiert:

$$D'_{ij} \underset{\text{def}}{=} D_{ij} - \tfrac{1}{3}\,D_{rr}\,\delta_{ij}\,, \tag{21 a}$$

$$D'_{\{ij\}kl} \underset{\text{def}}{=} D_{ijkl} - \tfrac{1}{3}\,D_{rrkl}\,\delta_{ij}\,^*\,, \tag{21 b}$$

$$D'_{\{ij\}klmn} \underset{\text{def}}{=} D_{ijklmn} - \tfrac{1}{3}\,D_{rrklmn}\,\delta_{ij}\,. \tag{21 c}$$

Für den isotropen Sonderfall (13 a, b, c) lautet die Stoffgleichung (20):

$$^e\varepsilon'_{ij} = 2\,b_2\,\sigma'_{ij} + 8\,c_3\,(\sigma'^{(2)}_{ij})' + 4\,(c_2 + \tfrac{4}{3}c_3)\,\sigma_{pp}\,\sigma'_{ij}\,, \tag{22 a}$$

bzw. da nach (16) der Faktor vor dem dritten Glied verschwindet:

$$^e\varepsilon'_{ij} = 2\,b_2\,\sigma'_{ij} + 8\,c_3\,(\sigma'^{(2)}_{ij})'\,. \tag{22 b}$$

Daran ist

$$(\sigma'^{(2)}_{ij})' = \sigma'^{(2)}_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\sigma'^{(2)}_{pp}\,\delta_{ij} \tag{23}$$

der „Deviator des Quadrates $\sigma'^{(2)}_{ij} = \sigma'_{ik}\sigma'_{kj}$ des Spannungsdeviators". Im linearelastischen Fall mit $c_3 = 0$ und $b_2 = 1/4\,G$ geht (22 b) in das Hookesche Gesetz

$$^e\varepsilon'_{ij} = \sigma'_{ij}/2\,G \tag{24}$$

und (G Gleitmodul), und damit wird die elastische Gestaltänderungsenergiedichte (18)

$$^e A' = \sigma'_{ij}\,\sigma'_{ij}/4\,G = J_2'/2\,G\,. \tag{25}$$

* Diese Schreibweise erinnert an den in i, j antisymmetrischen Teil $D_{[ij]kl}$, der über die Alternierungsvorschrift $D_{[ij]kl} \underset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}\,(D_{ijkl} - D_{jikl})$ gegeben ist (Analogie).

Darin liegt bekanntlich die physikalische Bedeutung der quadratischen Deviatorinvanten J_2' bzw. des quadratischen plastischen Potentials $F=J_2'$ nach Mises [8–10].

Für den allgemeinen anisotropen Fall mit den Stoffgleichungen (20) wird die Integration gemäß (18) schwerfällig, so daß im folgenden der Sonderfall der *elastischen Inkompressibilität* erörtert werden soll, der durch die Forderung

$$^{e}\varepsilon_{kk} \overset{!}{=} 0 \quad \text{bzw.} \quad ^{e}\varepsilon_{ij}' \overset{!}{=} {}^{e}\varepsilon_{ij} \qquad (26\,\text{a, b})$$

gekennzeichnet ist und Analogien zur Plastomechanik gestattet. Aus dieser Forderung (26 b) erhält man durch Koeffizientenvergleich aus den Gln. (7a) und (20):

$$D_{ij}'=D_{ij}\,, \quad D_{\{ij\}kl}'=D_{ijkl}\,, \quad D_{\{ij\}klmn}'=D_{ijklmn} \qquad (27)$$

und damit aus (21 a, b, c) als Inkompressibilitätsbedingung:

$$D_{rr}=D_{rrkl}=D_{rrklmn}=0\,, \qquad (28)$$

so daß Gl. (20) auch auf die Form

$$^{e}\varepsilon_{ij}'=D_{ij}+D_{ijkl}\,\sigma_{kl}'+D_{ijklmn}\,\sigma_{kl}'\,\sigma_{mn}' \qquad (29)$$

gebracht werden kann, indem man in (20) den Spannungstensor σ_{ij} durch seinen Deviator und Kugeltensor ersetzt und die Bedingungen (27) und (28) berücksichtigt. Mit (29) vereinfacht sich die Integration in (18):

$$^{e}\mathrm{A}'=\tfrac{1}{2}\,D_{ijkl}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{kl}'+\tfrac{2}{3}\,D_{ijklmn}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{kl}\,\sigma_{mn}'\,. \qquad (30)$$

In der Plastomechanik inkompressibler anisotroper Stoffe legt man allgemein ein plastisches Potential der Form

$$F=F\,(F_1',F_2',F_3') \qquad (31)$$

mit den Teilpotentialen

$$F_1'=D_{ij}\,\sigma_{ij}'\,, \quad F_2'=\tfrac{1}{2}\,D_{ijkl}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{kl}'\,, \qquad (32\,\text{a, b})$$

$$F_3'=\tfrac{1}{3}\,D_{ijklmn}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{kl}'\,\sigma_{mn}' \qquad (32\,\text{c})$$

zugrunde und stellt in [7] gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Fließortkurven an Ti4Al-Blechen fest, die anisotrop waren und einen Bauschinger-Effekt aufwiesen.

Der Vergleich mit dem Ergebnis (30) zeigt, daß die *elastische Gestaltänderungsenergiedichte bei Inkompressibilität formal* mit einer Linearkombination aus den *plastischen Teilpotentialen (32 b, c) identifiziert* werden kann:

$$^{e}\mathrm{A}'\equiv F_2'+2\,F_3'\,. \qquad (33)$$

In der *linearen* Elastizitätstheorie ist bei Inkompressibilität die elastische Gestaltänderungsenergiedichte formal identisch mit dem quadratischen Teilpotential (32 b), das als Sonderfall *ortho*gonaler Aniso*tropie* (Orthotropie) die Hill-Bedingung enthält.

Drückt man in (1) die Tensoren σ_{ij} und $^{e}\varepsilon_{ij}$ durch ihre Deviatoren und Kugeltensoren aus, so gelingt die Aufspaltung

$$\Pi=\Pi'+\Pi_{\mathrm{Vol}} \qquad (34)$$

in einen „Gestaltänderungsanteil“

$$\Pi'=\sigma_{ij}'\,{}^{e}\varepsilon_{ij}' \qquad (35)$$

und in einen Anteil

$$\Pi_{\mathrm{Vol}}=\tfrac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,{}^{e}\varepsilon_{ll}\equiv\sigma_m\,{}^{e}\varepsilon_{\mathrm{Vol}}\equiv -p\,{}^{e}\varepsilon_{\mathrm{Vol}} \qquad (36)$$

(p hydrostatischer Druck, $^{e}\varepsilon_{\mathrm{Vol}}$ elastische Volumendehnung), der für die „Volumendehnung“ verantwortlich ist. Bei *elastischer Inkompressibilität* (26 a, b) verschwindet der Anteil Π_{Vol}, und das elastische Potential stimmt dann mit dem Anteil Π' gemäß (35) überein, so daß für diesen Sonderfall aus (35) mit (29) folgt:

$$\Pi\overset{!}{=}\Pi'=D_{ij}\,\sigma_{ij}'+D_{ijkl}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{kl}'+D_{ijklmn}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{kl}'\,\sigma_{mn}'\,, \qquad (37)$$

d. h., das elastische Potential kann dann formal mit folgender Linearkombination plastischer Teilpotentiale (32 a, b, c) identifiziert werden:

$$\Pi\overset{!}{=}\Pi'\equiv F_1'+2\,F_2'+3\,F_3'\,. \qquad (38)$$

Analog zur Ergänzungsarbeit Π_σ in Gl. (3) kann man zu (18) eine entsprechende „Ergänzung“ definieren:

$$^{e}\mathrm{E}'\underset{\mathrm{def}}{=}\int {}^{e}\varepsilon_{ij}'\,\mathrm{d}\sigma_{ij}'\,, \qquad (39)$$

die mit (29) übergeht in:

$$^{e}\mathrm{E}'=D_{ij}\,\sigma_{ij}'+\tfrac{1}{2}\,D_{ijkl}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{kl}'+\tfrac{1}{3}\,D_{ijklmn}\,\sigma_{ij}'\,\sigma_{kl}'\,\sigma_{mn}'\,, \qquad (40)$$

d. h. formal identisch ist mit der Linearkombination

$$^{e}\mathrm{E}'\equiv F_1'+F_2'+F_3' \qquad (41)$$

plastischer Teilpotentiale (32 a, b, c). Die Addition von (33) und (41) führt auf (38):

$$\Pi'={}^{e}\mathrm{A}'+{}^{e}\mathrm{E}'\equiv\Pi_{\varepsilon'}'+\Pi_{\sigma'}'\,. \qquad (42)$$

Andererseits folgt aus (35)

$$\sigma_{ij}'=\partial\Pi'/\partial\,{}^{e}\varepsilon_{ij}' \quad \text{und} \quad {}^{e}\varepsilon_{ij}'=\partial\Pi'/\partial\sigma_{ij}'\,, \qquad (43)$$

so daß analog zu (3) über das vollständige Differential $\mathrm{d}\Pi'$ die Aufspaltung gemäß (42) folgt.

Elastische Formänderungsenergiedichte und plastisches Potential kompressibler Stoffe

In der Plastomechanik kompressibler Stoffe geht man allgemein von einem plastischen Potential (11) der Form

$$F = F(F_1, F_2, F_3) \tag{44}$$

aus [7] mit den Teilpotentialen

$$F_1 = D_{ij}\,\sigma_{ij}\,, \quad F_2 = \tfrac{1}{2}\,D_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}\,, \tag{45 a, b}$$

$$F_3 = \tfrac{1}{3}\,D_{ijklmn}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}\,\sigma_{mn} \tag{45 c}$$

gemäß (11). Rein formal gehen diese Größen in die elastische Formänderungsenergiedichte (3)

$$\Pi_\varepsilon = \int \sigma_{ij}\,\mathrm{d}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij} \tag{46 a}$$

ein, die mit dem Stoffgesetz (7 a) in

$$\Pi_\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,D_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl} + \tfrac{2}{3}\,D_{ijklmn}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}\,\sigma_{mn} \tag{46 b}$$

übergeht, so daß vergleichbar mit (33) die formale Identität *

$$\Pi_\varepsilon \equiv F_2 + 2\,F_3 \tag{47}$$

besteht. In der linearen Elastizitätstheorie ist die elastische Formänderungsenergiedichte formal identisch mit dem quadratischen Teilpotential (45 b), das schon von Mises [3] benutzt wird, wenn auch in anderer Schreibweise. Dieses quadratische plastische Potential (45 b) kann zur analytischen Beschreibung des mechanischen Verhaltens kompressibler anisotroper Stoffe herangezogen werden, die sich „symmetrisch" gegenüber Zug- und Druckbeanspruchung verhalten, d. h. keinen Bauschinger-Effekt aufweisen. Darüber hinaus beinhaltet das quadratische plastische Potential (45 b) die sogenannte Hill-Bedingung als Sonderfall *ortho*gonaler Aniso*tropie* (Orthotropie), wenn man zusätzlich noch Volumenkonstanz ** (27) bzw. (28) fordert [7]. Die *Inkompressibilitätsbedingung* $D_{kkij} = 0$ gemäß (28) führt bei orthogonaler Anisotropie in Verbindung mit der Symmetrieeigenschaft $D_{ijkl} = D_{klij}$ auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} D_{1122} &= -\tfrac{1}{2}(D_{1111} + D_{2222} - D_{3333}) \\ D_{1133} &= -\tfrac{1}{2}(D_{1111} - D_{2222} + D_{3333}) \\ D_{2233} &= -\tfrac{1}{2}(-D_{1111} + D_{2222} + D_{3333})\,, \end{aligned} \tag{48}$$

* Der Unterschied liegt in den Stofftensoren D_{ij}, D_{ijklmn} usw., die in (4 a) bzw. (6 a) und (11) bzw. (12), (45 a, b, c) gleich bezeichnet wurden, um die formale Identität noch deutlicher zu zeigen.

** Dagegen ist mit den Ansätzen (32 a, b, c) die Volumenkonstanz a priori erfüllt!

so daß nur *sechs* der *neun* Orthotropiekoeffizienten D_{1111}, D_{2222}, D_{3333}, D_{1212}, D_{2323}, D_{3131}, D_{1122}, D_{1133}, D_{2233} voneinander unabhängig sind.

Das elastische Potential (1) lautet mit dem Stoffgesetz (7 a)

$$\Pi = D_{ij}\,\sigma_{ij} + D_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl} + D_{ijklmn}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}\,\sigma_{mn}\,, \tag{49}$$

so daß mit (45 a, b, c) vergleichbar mit (38) die formale Identität

$$\Pi \equiv F_1 + 2\,F_2 + 3\,F_3 \tag{50}$$

besteht. Gleichung (50) erhält man auch durch Addition (3) aus der spezifischen Ergänzungsarbeit (6 a) und der Formänderungsenergiedichte (47).

Zusammenfassung

Nach einigen grundlegenden Bemerkungen zum elastischen und plastischen Potential wird gezeigt, daß die elastische Gestaltänderungsenergiedichte und ihre Ergänzungsarbeit inkompressibler Stoffe formal mit Linearkombinationen plastischer Teilpotentiale der Form

$$F_\varrho = \frac{1}{\varrho}\,D_{ijkl\ldots qr}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}\ldots\sigma'_{qr}$$

identifiziert werden können. In gleicher Weise wird die formale Identität der elastischen Formänderungsenergiedichte und ihrer Ergänzungsarbeit kompressibler Stoffe mit Linearkombinationen plastischer Teilpotentiale der Form

$$F_\varrho = \frac{1}{\varrho}\,D_{ijkl\ldots qr}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}\ldots\sigma_{qr}$$

nachgewiesen. In der linearen Elastizitätstheorie sind die genannten Energiegrößen formal identisch mit dem quadratischen plastischen Potential

$$F_2 = \tfrac{1}{2}\,D_{ikl}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}$$

inkompressibler Stoffe bzw. mit dem quadratischen plastischen Potential

$$F_2 = \tfrac{1}{2}\,D_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}$$

kompressibler Stoffe.

Es sei jedoch ausdrücklich vermerkt, daß zwischen dem elastischen und plastischen Potential nur eine reine formale Analogie besteht. Die physikalische Bedeutung der beiden Potentiale ist grundverschieden. Häufig tritt sogar der Fall ein, daß ein Stoff nach plastischer Verformung zwar in seinem elasti-

schen Verhalten isotrop bleibt, in seinem plastischen Verhalten jedoch anisotrop wird (*Verformungsanisotropie, Textur*). Dann wird das elastische Potential durch eine „isotrope Tensorfunktion" mit „isotropen Stofftensoren" ausgedrückt, während das plastische Potential „anisotrope Stofftensoren" enthält.

[1] G. F. Smith u. R. S. Rivlin, Trans. Am. Math. Society **88,** 175 [1958].

[2] G. F. Smith, Arch. Rat. Mech. Anal. **10,** 108 [1962].

[3] R. v. Mises, Z. angew. Math. Mech. **8,** 161 [1928].

[4] D. C. Drucker, Proc. 1st. U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. 487 [1951].

[5] A. Troost u. J. Betten, Mech. Res. Comm. **1,** 73 [1974].

[6] J. Betten, Z. angew. Math. Mech. **56,** [1977], im Druck.

[7] J. Betten, Acta Mechanica **25,** 79 [1976].

[8] H. Hencky, Z. angew. Math. Mech. **5,** 116 [1925].

[9] A. Troost, Naturwiss. **56,** 559 [1969].

[10] J. Betten, Z. Naturforsch. **31 a,** 639 [1976].